

# MMPP/D/1 キューイングにおける最適 IS シミュレーション分布

小川 耕司<sup>†</sup>      中川 健治<sup>††</sup>

## The Optimal IS Simulation Distribution of MMPP/D/1 Queuing

Koji OGAWA<sup>†</sup> and Kenji NAKAGAWA<sup>††</sup>

あらまし ATM 網では  $10^{-12}$  オーダのセル廃棄率の特性を知る必要がある。この特性を一般的なモンテカルロ (MC: Monte Carlo) シミュレーションで得るには膨大な時間を必要とする。インポートランスサンプリング (IS: Importance Sampling) 法は MC 法の高速化に有効である。IS では真の分布を変化させたシミュレーション分布でシミュレーションを行う。IS で高速化を図るために IS 推定値の分散が最小となる最適シミュレーション分布を決定することが重要である。ATM 網のキューイングにおいて、定常状態のキュー長  $Q$  がある値  $q$  を超える確率を  $P[Q > q]$  とする。本論文では、IS の最適シミュレーション分布を用いて高速に  $10^{-12}$  オーダの  $P[Q > q]$  の推定値を得ることを目的とする。最適シミュレーション分布を決定する従来の方法では決定に相当の時間を必要とする、等の問題がある。本論文では、これらの問題を克服して、マルコフ連鎖の性質と Large Deviation Theory を利用して理論的に最適なシミュレーション分布を導出した。そして実際に導出した最適シミュレーション分布で IS シミュレーションを行った。その結果、M/D/1, 2 状態 MMPP/D/1 モデルにおいて  $10^{-12}$  オーダの  $P[Q > q]$  の推定値を高速に得ることを可能にした。

キーワード ATM, キューイング, シミュレーション, インポートランスサンプリング, 最適シミュレーション分布, MMPP モデル

### 1. まえがき

近年、情報通信の高速化ニーズに伴い、ATM (Asynchronous Transfer Mode) をベースとした B-ISDN の実現が期待されている。ATM 網ではデータをセル単位で統計多重する特性上、セル廃棄は避けられない。ATM 網では  $10^{-12}$  オーダのセル廃棄率の特性を知る必要がある。この特性を一般的なモンテカルロ (MC: Monte Carlo) シミュレーションで得るには膨大な時間を必要とする。

MC シミュレーションの高速化にインポートランスサンプリング (IS: Importance Sampling) 法の適用は有効である。IS 法はいくつかの待ち行列のシミュレーションにおいてもその効果が実証されている。

IS 法は稀少事象を短時間で多く得るために、真の分布を変化させた分布をシミュレーション分布に使う。シミュレーションによって得られた推定値の分散が最

小となる分布を最適シミュレーション分布と言う。IS 法によるシミュレーションでは、最適シミュレーション分布を決定することが重要である。

ATM 網のキューイングにおいて、定常状態のキュー長  $Q$  がある値  $q$  を超える確率を  $P[Q > q]$  とする。本論文では、IS の最適シミュレーション分布を用いて高速に  $10^{-12}$  オーダの  $P[Q > q]$  の推定値を得ることを目的とする。

$P[Q > q]$  の推定値はキューイングシミュレーションで得る。キューイングシミュレーションにおける最適 IS シミュレーション分布を決定する従来の方法は相当の時間を必要とする。

本論文では、これらの問題を克服して、マルコフ連鎖の性質と Large Deviation Theory によって理論的に最適シミュレーション分布を導出する方法を適用して、M/D/1 および 2 状態 MMPP/D/1 において最適なシミュレーション分布を導出した。実際、最適なシミュレーション分布を与える MMPP のパラメータを具体的な形で書き表した。そして導出した最適シミュレーション分布で IS シミュレーションを行った。その結果、M/D/1, 2 状態 MMPP/D/1 モデルにおいて

<sup>†</sup> 東レ株式会社, 大津市  
Toray Industries, Inc., Otsu-shi, 520 Japan

<sup>††</sup> 長岡技術科学大学工学部, 長岡市  
Faculty of Engineering, Nagaoka University of Technology,  
Nagaoka-shi, 940-21 Japan

通常の MC シミュレーションでは得ることが困難な  $10^{-12}$  オーダの  $P[Q > q]$  の推定値を高速に得ることを可能にした。

2. では IS 法の原理を記述する。3. では、キューイングシミュレーションへの IS の方法を記述する。4. では従来の最適シミュレーション分布の決定方法とその問題点について記述する。5. では、新しく見いだした方法による M/D/1 および MMPP/D/1 の最適シミュレーション分布の導出方法を記述する。6. では、本論文で導出した最適シミュレーション分布で実際に IS シミュレーションを行った結果を評価する。

## 2. インポートランスサンプリング (IS)

### 2.1 通常のモンテカルロ (MC) シミュレーション

図 1 において確率密度  $p(x)$  は平均値 = 0, 分散 = 1 の正規分布である。  $p(x)$  に従う確率変数  $X$  がある値  $a$  より大きくなる確率を  $P[X > a]$  とする。そこで、  $P[X > a]$  を通常の MC 法で得ることを考える。

まず、正規分布に従う乱数を発生させる必要がある。コンピュータで生成する一様乱数を  $RND(0 < RND \leq 1)$  と定義すると、Box Muller 法によれば、

$$X = \sqrt{-2 \log(RND)} \sin(2\pi RND) \quad (1)$$

より平均値 = 0, 分散 = 1 の正規分布に従う確率変数  $X$  が得られる。

そして、MC 法によれば正規分布に従う  $X$  を  $n$  回発生させて、

$$P[X > a] \cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_a(x_i) \quad (2)$$

より  $P[X > a]$  の推定値を得る。ここで、  $x_i$  は  $i$  番目に発生した標本値を表し、

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1, & x > a \\ 0, & x \leq a \end{cases} \quad (3)$$

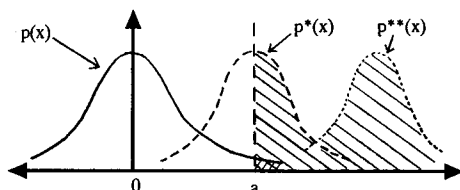


図 1 正規分布の例  
Fig. 1 IS simulation distribution for normal distribution.

である。

例えば、  $P[X > 3] = 0.00135$  を通常の MC 法により得ることを考える。通常の MC 法で所望の確率  $P$  を得るためには一般に  $10/P$  個程度以上の標本値が必要である。従って  $P[X > 3] = 0.00135$  を得るためには最低でも約 10,000 個の標本値が必要となる。シミュレーション回数を標本値の発生回数と定義すると、10,000 回のシミュレーション回数を要する。

更に求めたい確率が  $10^{-12}$  オーダであれば、  $10^{13}$  回以上のシミュレーション回数が必要となる。従って通常の MC 法では非現実的なほど膨大な時間を要する。

一方、通常の MC 法ではコンピュータで発生させる乱数の限界にも大きく影響される場合がある。16 bit のコンピュータの整数乱数の範囲は 0 から 32,767 である。この整数乱数を用いて  $RND$  の範囲を  $(0 + 1)/(32,767 + 1) \leq RND \leq (32,767 + 1)/(32,767 + 1)$  とする。そして  $RND$  を式 (1) に代入する。すると、16 bit のコンピュータで正規分布に従う乱数  $X$  の範囲は  $-4.56 < X < +4.56$  となることがわかる。すなわち、  $P[X > 4.56]$  は通常の MC 法によるシミュレーションからは得ることはできない。

これらの問題点はつぎに示す IS を用いることにより克服される。

### 2.2 インポートランスサンプリング

IS は MC 法のシミュレーションによって得られる推定値の分散を減少させる手法として開発され [1] 広く利用されるようになった。その応用例として待ち行列等稀少事象のシミュレーションの高速化 [4] や ATM セル廃棄率を得るシミュレーションの高速化 [5], [6] に有効である。またデジタル通信のビット誤り率を得るシミュレーション等にも適用されている [2], [3]。

IS による MC 法のシミュレーションの高速化を正規分布を例に説明する。図 1 において、  $p(x)$  は真の分布である。シミュレーションには  $a$  より大きい標本値の発生頻度が真の分布より高くなるシミュレーション分布を用いる。具体的には  $p^*(x)$  で表す平均値 =  $a$ , 分散 = 1 の正規分布に従う確率密度をシミュレーション分布とする。

$p^*(x)$  をシミュレーション分布としてシミュレーションを行えば 1/2 の確率で標本値が  $a$  より大きくなる。  $10/P$  程度以上の標本値が必要なことから 20 個以上の標本値が得られればよい。  $a = 3$ ,  $P[X > 3] = 0.00135$  の場合、通常の MC 法では約 10,000 回の標本数が必要である。従って通常の MC 法の  $20/10,000 = 1/500$

の標本数が得られればよい。故に 500 倍の高速化を得る。所望の確率が更に稀少であれば更に高速化効果上がる。

そして、シミュレーション分布である  $p^*(x)$  より得た標本値に対して、

$$P[X > a] \cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_a(x_i^*) \frac{p(x_i^*)}{p^*(x_i^*)} \quad (4)$$

のように、シミュレーション分布の変化分を補償する重み関数  $p(x_i^*)/p^*(x_i^*)$  をかける。ここで、 $x_i^*$  は  $p^*(x)$  による  $i$  番目の標本値を表す。このようにして式 (4) より所望の確率  $P[X > a]$  の IS による推定値を得る。

以上のように IS では少ないシミュレーション回数で高速に所望の確率が得られる。

### 2.3 最適シミュレーション分布

最適シミュレーション分布とはそのシミュレーション分布によって得られた推定値の分散が最小となる分布である。

シミュレーション分布の選択には注意を要する。 $a$  より大きい標本値の発生頻度を高くするのであれば、図 1 のように  $p^*(x)$  より  $p^{**}(x)$  のほうが頻度が高くなり良いと考えられる。

しかし平均値 = 0, 分散 = 1 の正規分布の  $P[X > a]$  を得るときは平均値  $a$  の正規分布をシミュレーション分布としたときが、シミュレーションにより得られた推定値の分散が最小になることが証明されている [9]。つまり図 1 において  $P[X > a]$  を得るときは  $p^*(x)$  が最適シミュレーション分布である。従って、発生頻度を単純に高くするだけでは IS の効果が得られない。シミュレーション分布の選択を誤ると分散が悪くなるどころか推定値自体も真値からずれてしまい信頼性を損なう。従って IS ではいかにシミュレーション分布を最適に選択するかが重要である。

## 3. キューイングシミュレーション

マルコフ変調ポアソン過程 (MMPP: Markov Modulated Poisson Process) モデルは画像や音声データが混在する ATM セルトラフィックのバースト性を良く近似できる評価モデルとして広く用いられている。

2 状態 MMPP はポアソン過程に従って到着した状態が二つある。その二つの状態をそれぞれ 0, 1 とする。状態 0, 1 における到着率をそれぞれ  $\lambda_0, \lambda_1$  とする。更に状態  $i$  から状態  $j$  への状態遷移確率を  $r_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$ , とする。

MMPP/D/1 はサービス時間を一定値  $D$  とするバッファサイズが無限大のモデルである。MMPP/D/1 はサービス終了時点においてキュー長と MMPP の状態の組がマルコフ連鎖をなす。

定常状態のキュー長  $Q$  がある値  $q$  を超える確率を  $P[Q > q]$  とする。M/D/1 および 2 状態 MMPP/D/1 モデルの  $P[Q > q]$  の推定値をキューイングシミュレーションによって得ることを考える。M/D/1 を 1 状態 MMPP/D/1 とみなす。シミュレーションは 1 セルサービス時間を単位時間とした離散時間で行う。時刻  $t$  におけるキュー長と MMPP の状態をそれぞれ、 $Q_t, S_t$  とする。 $\mathbf{X}_t = (Q_t, S_t)$ ,  $t \geq 0$  とすると、 $\mathbf{X}_t$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0 &= \mathbf{X}^0, \\ \mathbf{X}_{t+1} &= \mathbf{X}_t + \mathbf{U}(\mathbf{X}_t, \mathbf{F}) \end{aligned} \quad (5)$$

で表されるようにマルコフ連鎖をなす。ここで、 $A_i$  を状態  $i$ ,  $i = 0, 1$ , でのセル到着数とし、 $C_i$  を確率  $P(C_i = j) = r_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$ , に従う *i.i.d.* 確率変数として、 $\mathbf{F} = (A_0, A_1, C_0, C_1)$  とし、 $\mathbf{U}(\mathbf{X}_t, \mathbf{F})$  は  $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^4$  から  $\mathbf{R}^2$  への写像で、次のように定義される；

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{X}_t, \mathbf{F}) &= \begin{cases} ((1 - S_t)A_0 + S_tA_1 - 1, (1 - S_t)C_0 \\ \quad + S_tC_1 - S_t), & Q_t > 0 \\ ((1 - S_t)A_0 + S_tA_1, (1 - S_t)C_0 \\ \quad + S_tC_1 - S_t), & Q_t = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

そしてマルコフ連鎖の状態遷移確率を  $P(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+1})$  とする。

つぎにキューイングシミュレーション方法について、通常の MC 法と IS 法による二つの方法を説明する。

### 3.1 通常の MC 法によるキューイングシミュレーション

$P[Q > q]$  を通常の MC 法で得るためのキューイングシミュレーションは次のように行う。まず、

$$Q_{t+1} = \max(Q_t + G_{t+1} - 1, 0) \quad (7)$$

で表される処理を  $n$  回繰り返す。ここで、 $G_{t+1}$  は時刻  $t+1$  に到着したセル個数であり、 $Q_t$  は時刻  $t$  のキュー長である。 $n$  はシミュレーション回数を表す。そして、

$$P[Q > q] \cong \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \delta_q(Q_t) \quad (8)$$

より  $P[Q > q]$  の推定値を得る。但し、

$$\delta_q(Q_t) = \begin{cases} 1, & Q_t > q \\ 0, & Q_t \leq q \end{cases} \quad (9)$$

である。

式 (8) で  $Q_t > q$  となる事象が稀少であれば、十分に  $Q_t > q$  となる事象を得るためにシミュレーション回数  $n$  の値を大きくとる必要がある。

### 3.2 IS によるキューイングシミュレーション

#### 3.2.1 再生サイクル

IS によってセル廃棄率の推定値を得る場合はシミュレーションに再生サイクル (RC: Regenerative Cycle) の考えが用いられる。RC の定義と性質を以下に示す。

図 2 においてキュー長が、

$$Q_t = 0, \quad Q_{t+1} > 0 \quad (10)$$

となるときを考える。式 (10) のように時刻  $t$  でキュー長 = 0 から時刻  $t+1$  でキュー長  $> 0$  となるとき、時刻  $t$  を再生点と言う。そして再生点と次の再生点の間を RC と言う。RC を用いると、

$$P[Q > q] \cong \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{t_k=1}^{T_k} \delta_q(Q_{t_k})}{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M T'_k} \quad (11)$$

より、 $P[Q > q]$  の推定を得る [6]。ここで、 $t_k$  は  $k$  番目の RC 内での時刻を表す。 $Q_{t_k}$  は時刻  $t_k$  のキュー長を表す。 $N, M$  はシミュレーション中に発生した RC の数を表し、 $T_k, T'_k$  は  $k$  番目の RC の長さを表す。

通常の MC 法では  $Q_t > q$  となる事象が稀少であれば式 (11) の  $N$  の値を増加させなければ十分な  $Q_t > q$  となる事象が得られない。従ってシミュレーション回数が膨大になる。そこで、少ないシミュレーション回

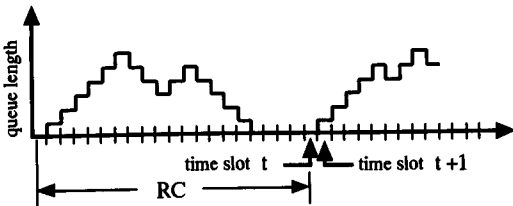


図 2 再生点と RC

Fig. 2 Regenerative points and regenerative cycles.

数で多くの  $Q_t > q$  となる事象を得るために IS を用いる。

その方法は  $Q_t > q$  となる事象の発生頻度が高くなるようなシミュレーション分布を用いる。具体的には、真の分布の平均到着率  $\lambda$  を、

$$\lambda = \frac{\lambda_0 r_{10} + \lambda_1 r_{01}}{r_{10} + r_{01}} \quad (12)$$

として、 $\lambda' > \lambda$  となるような、

$$\lambda' = \frac{\lambda'_0 r'_{10} + \lambda'_1 r'_{01}}{r'_{10} + r'_{01}} \quad (13)$$

をシミュレーション分布の平均到着率とする。 $\lambda_0, \lambda_1, r_{01}, r_{10}$  はそれぞれ真の分布の MMPP の各状態における到着率と状態遷移確率を表す。 $\lambda'_0, \lambda'_1, r'_{01}, r'_{10}$  はそれぞれシミュレーション分布の MMPP の各状態における到着率と状態遷移確率を表す。シミュレーション分布での時刻  $t$  におけるキュー長と状態をそれぞれ  $Q'_t, S'_t$  として、

$$X'_t = (Q'_t, S'_t) \quad (14)$$

とする。そして、シミュレーション分布の状態遷移確率を  $P'(X'_t, X'_{t+1})$  とする。シミュレーション分布での  $k$  番目の RC の時刻  $t_k$  でのキュー長を  $Q'_{t_k}$  として、

$$P[Q > q] \cong \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{t_k=1}^{T_k} \delta_q(Q'_{t_k}) W_{t_k}}{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \sum_{t_k=1}^{T'_k} W_{t_k}} \quad (15)$$

より  $P[Q > q]$  の IS による推定値を得る [6]。ここで、 $W_{t_k}$  はシミュレーション分布で得られた標本値  $\delta_q(Q'_{t_k})$  を真の分布で得られた標本値  $\delta_q(Q_{t_k})$  へ補償する重み関数であり、次のように定義される [6]；

$$W_{t_k} = \prod_{m_k=1}^{t_k} \frac{P(X'_{m_k-1}, X'_{m_k})}{P'(X'_{m_k-1}, X'_{m_k})} \quad (16)$$

ここで、 $X'_{m_k}$  はシミュレーション分布における  $k$  番目の RC 内の時刻  $m_k$  での状態を表す。 $P(X'_{m_k-1}, X'_{m_k})$  は  $X'_{m_k-1}$  から  $X'_{m_k}$  への真の分布での状態遷移確率を表す。

#### 3.2.2 ダイナミック IS

しかし、単にシミュレーション分布の平均到着率  $\lambda'$  を  $\lambda' > \lambda$  となる値にするだけではシミュレーション

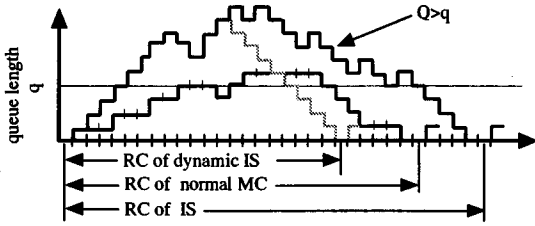


図3 ダイナミック IS による RC の短縮化  
Fig.3 Contraction of RC by dynamic IS.

の高速化につながらない。なぜならば図3に示すように、ISの1RC当りの時間が通常のMC法のRCの時間より長くなるからである。これは $Q_t > q$ となる事象の発生頻度が高くなりキュー長が0に戻るまでの時間が長くなるからである。従ってシミュレーションの高速化につながらない。そこで、以下に述べるダイナミックIS(DIS)を用いて高速化を図る。

DISの方法は図3において、まずはシミュレーション分布の $\lambda'$ を $\lambda' > \lambda$ となる値でシミュレーションを開始する。つぎに十分に $Q_t > q$ となる事象が得られた後、キュー長が速やかに0に戻るように $\lambda'$ を $\lambda' \ll \lambda$ となる値に切り換える。つまりシミュレーション分布を図3の点線で示す分布に切り換える。この方法により短時間のRCで多くの $Q_t > q$ となる事象が得られる。このようにシミュレーション中にシミュレーション分布を切り換える方法はダイナミックIS(DIS)と呼ばれ、ISの重要な要素の一つである[6]。具体的には、 $Q_t > q$ となる事象が15個程度得られた後、 $\lambda'$ を適当に低い値、例えば $\lambda' = 0.001\lambda$ 程度の値に切り換える[6]。

また最適なシミュレーション分布は $\lambda' > 1$ となる場合もある。 $\lambda' > 1$ となるとキュー長ほとんど0に戻らない。一定時間のシミュレーションを考えた場合、一つのRCが長ければシミュレーションにおけるRCの数は減少する。RCの数が少ないほどシミュレーション結果の分散は大きくなる。通常のMC法とRCの数を同じにした場合、ISのシミュレーション時間は長くなる。ISでは、 $\lambda' > 1$ のときには、一つのRCが延々と続きシミュレーション時間が膨大になる。この問題点を克服するためには、シミュレーションの途中で $\lambda'$ を $\lambda' \ll \lambda$ となる値に切り換えるDISが不可欠となる。

#### 4. 従来の最適シミュレーション分布の決定

従来の最適シミュレーション分布を決定する方法と

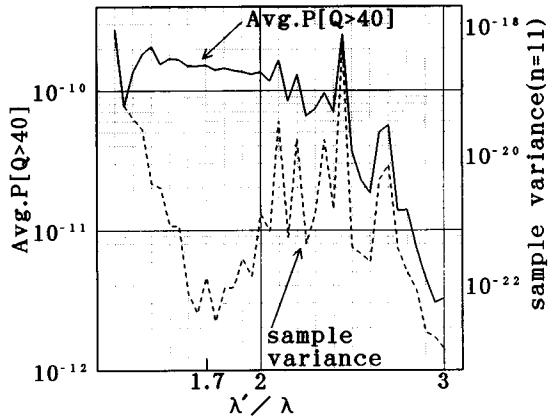


図4 事前シミュレーションによるM/D/1の $P[Q > q]$ の推定値の平均と分散特性  
Fig.4 The mean and variance of estimates for  $P[Q > q]$  by prior simulation.

して、事前シミュレーションによる方法がある[6]。事前シミュレーションによる方法は、まずいろいろなシミュレーション分布でシミュレーションを行う。そして、シミュレーションから得た推定値の平均が安定している領域で、その分散が最小となる分布を最適シミュレーション分布として得る方法である。

セルの到着率 $\lambda = 0.75$ のM/D/1を例を示す。シミュレーション分布の到着率 $\lambda'$ を変化させたとき、シミュレーションから得た $P[Q > q]$ の平均値とその分散特性は図4のように得られる。図中の横軸は真の分布の到着率 $\lambda$ とシミュレーション分布の $\lambda'$ との比 $\lambda'/\lambda$ である。図4から $P[Q > q]$ の平均値が安定している領域で、その分散が最小となる到着率の比 $\lambda'/\lambda$ は1.7付近と判断できる。従って、最適シミュレーション分布の到着率 $\lambda^*$ は $\lambda^* = 1.7\lambda = 1.7 \times 0.75 = 1.275$ と得られる。

しかし、上記の事前シミュレーションによる最適シミュレーション分布の決定方法には欠点がある。その欠点は、MMPPモデル等シミュレーション分布のパラメータが多数存在する場合、膨大な事前シミュレーションを行う必要があり相当の時間を要することである。

また、図4の特性から、シミュレーション分布の選択を誤ると、間違ったシミュレーション結果になることもわかる。なぜならば、図4の特性において、例えば $\lambda'/\lambda = 3$ にすると $P[Q > q]$ の推定値自体も大きく変動する。従って間違ったシミュレーション結果を与えることになるからである。

### 5. 最適シミュレーション分布の理論的導出

本論文では最適シミュレーション分布の決定方法として、マルコフ連鎖と Large Deviation Theory による理論的導出法 [9] を利用して MMPP/D/1 の最適シミュレーション分布を導出する。

前記式 (5) で表すマルコフ連鎖において、時刻  $t$  における  $U(\mathbf{X}_t, \mathbf{F})$  の  $\mathbf{F}$  に関するモーメント母関数を、

$$M_{\mathbf{X}_t}(\boldsymbol{\theta}) = E\{\exp\{\boldsymbol{\theta}U(\mathbf{X}_t, \mathbf{F})\}\} \quad (17)$$

とする。ここで、 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_0, \theta_1)$  である。

さて、 $\mathbf{z} = U(\mathbf{X}_t, \mathbf{F})$  として、真の分布の状態遷移確率を  $P(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t + \mathbf{z})$  とする。 $\boldsymbol{\theta}$  をパラメータとして、

$$P_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t + \mathbf{z}) = \frac{e^{\boldsymbol{\theta}^* \mathbf{z}}}{M_{\mathbf{X}_t}(\boldsymbol{\theta})} P(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t + \mathbf{z}) \quad (18)$$

の形の状態遷移確率で与えられるマルコフ連鎖を twisted Markov chain と言う。

Large Deviation Theory [9] を適用して、twisted Markov chain の中での最適なシミュレーション分布を得る。文献 [9] (p.70), 式 (26) 又は、文献 [10] (p.910), Theorem 2 によれば、すべての twisted Markov chain の中で、 $M_{\mathbf{X}_t}(\boldsymbol{\theta}^*) = 1$  (文献 [10] では、 $l_x(\lambda_x) = 0$  に相当する) を満たす  $\boldsymbol{\theta}^*$  によって決まる  $P_{\boldsymbol{\theta}^*}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t + \mathbf{z})$  が最適である。従って、式 (18) より、最適な  $P^* \equiv P_{\boldsymbol{\theta}^*}$  は、

$$P^*(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t + \mathbf{z}) = e^{\boldsymbol{\theta}^* \mathbf{z}} P(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t + \mathbf{z}) \quad (19)$$

によって与えられる。

つぎに M/D/1 および 2 状態 MMPP/D/1 の最適シミュレーション分布を導出する。

#### 5.1 M/D/1 の最適シミュレーション分布

M/D/1 ではサービス終了時点においてキュー長はマルコフ連鎖をなす [7]。1セルサービス時間を単位時間とし、セルの到着率を  $\lambda$ 、時刻  $t$  のキューを  $Q_t$  とし、時刻  $t+1$  におけるキュー長  $Q_{t+1}$  は式 (5) より、

$$Q_{t+1} = Q_t + U(Q_t, A) \quad (20)$$

と表現される。ここで、 $A$  は到着率  $\lambda$  のポアソン分布に従って発生する乱数を表し、 $U(Q_t, A)$  は単位時間のキュー長変化を表し、

$$U(Q_t, A) = \begin{cases} A - 1, & Q_t > 0 \\ A, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (21)$$

である。 $y = U(Q_t, A)$  とすると、 $A$  が到着率  $\lambda$  のポアソン分布に従うことから、式 (21) より、状態遷移確率  $P(Q_t, Q_t + y)$  は、

$$P(Q_t, Q_t + y) = \begin{cases} \frac{\lambda^{y+1}}{(y+1)!} e^{-\lambda}, & Q_t > 0 \\ \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (22)$$

となる。但し、

$$\begin{cases} y \geq -1, & Q_t > 0 \\ y \geq 0, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (23)$$

である。そこで、 $P(Q_t, Q_t + y)$  のモーメント母関数式 (17) は、式 (22) より、

$$M_{Q_t}(\theta) = \begin{cases} \sum_{y=-1}^{\infty} e^{\theta y} \frac{\lambda^{y+1}}{(y+1)!} e^{-\lambda} = e^{-(\lambda+\theta)+\lambda e^{\theta}}, & Q_t > 0 \\ \sum_{y=0}^{\infty} e^{\theta y} \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda+\lambda e^{\theta}}, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (24)$$

となる。そこで、定理 1 を得る。

[定理 1] 到着率を  $\lambda$  とする M/D/1 において、式 (22) に示す状態遷移確率  $P(Q_t, Q_t + y)$  のモーメント母関数  $M_{Q_t}(\theta)$  は、

$$M_{Q_t}(\theta) = \begin{cases} e^{-(\lambda+\theta)+\lambda e^{\theta}}, & Q_t > 0 \\ e^{-\lambda+\lambda e^{\theta}}, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (25)$$

である。ここで、 $Q_t$  は時刻  $t$  のキュー長を表す。□ つぎに式 (25) のモーメント母関数において、

$$M_{Q_t}(\theta^*) = 1 \quad (26)$$

を満たす  $\theta^*$  を数値的に求める。そして、得られた  $\theta^*$  をもとに最適シミュレーション分布の状態遷移確率を  $P^*(Q_t, Q_t + y)$  として式 (19) より、

$$P^*(Q_t, Q_t + y) = e^{\theta^* y} P(Q_t, Q_t + y) \quad (27)$$

を得る。但し、

$$\begin{cases} y \geq -1, & Q_t > 0 \\ y \geq 0, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (28)$$

である。

以上より定理2を得る。

[定理2] M/D/1について、真の分布の到着率を  $\lambda$  としたとき、ISの最適シミュレーション分布の到着率  $\lambda^*$  は、

$$\lambda^* = \begin{cases} e^{\theta^*} \lambda, & Q_t > 0 \\ \lambda, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (29)$$

である。ここで、 $Q_t$  は時刻  $t$  におけるキュー長を表し、 $\theta^*$  は式(26)の数値解である。またISによって得られた標本値を真の分布の標本値に補償する重み関数は式(27)より  $e^{-\theta^* y}$  である。 $y$  は単位時間のキュー長変化を表し、

$$\begin{cases} y \geq -1, & Q_t > 0 \\ y \geq 0, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (30)$$

である。 □

### 5.2 2状態 MMPP/D/1の最適シミュレーション分布の導出

MMPP/D/1はサービス終了時点において、キュー長とMMPPの状態の組がマルコフ連鎖をなす。2状態MMPP/D/1の最適シミュレーション分布を導出する。

MMPPの状態を0,1とする。状態  $i$  におけるセルの到着率を  $\lambda_i$ ,  $i = 0, 1$ , 状態  $i$  から状態  $j$  への状態遷移確率を  $r_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$ , とする。

時刻  $t$  におけるキュー長とMMPPの状態をそれぞれ、 $Q_t, S_t$  とする。 $\mathbf{X}_t = (Q_t, S_t), t \geq 0$  とおくと、 $\mathbf{X}_t$  は、

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0 &= \mathbf{X}^0, \\ \mathbf{X}_{t+1} &= \mathbf{X}_t + \mathbf{U}(\mathbf{X}_t, \mathbf{F}) \end{aligned} \quad (31)$$

で表されるようにマルコフ連鎖をなす。ここで、 $A_i$  を状態  $i$ ,  $i = 0, 1$ , でのセル到着数とし、 $C_i$  を確率  $P(C_i = j) = r_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$ , に従う *i.i.d.* 確率変数として、 $\mathbf{F} = (A_0, A_1, C_0, C_1)$  とし、 $\mathbf{U}(\mathbf{X}_t, \mathbf{F})$  は  $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^4$  から  $\mathbf{R}^2$  への写像で、次のように定義される：

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}(\mathbf{X}_t, \mathbf{F}) \\ &= \begin{cases} ((1-S_t)A_0 + S_t A_1 - 1, (1-S_t)C_0 \\ \quad + S_t C_1 - S_t), & Q_t > 0 \\ ((1-S_t)A_0 + S_t A_1, (1-S_t)C_0 \\ \quad + S_t C_1 - S_t), & Q_t = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

そしてマルコフ連鎖の状態遷移確率を  $P(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+1})$  とする。

時刻  $t$  のMMPPの状態を  $i$ , 時刻  $t+1$  のMMPPの状態を  $j$ , 単位時間のキュー長変化を  $y = Q_{t+1} - Q_t$  とする。但し、

$$\begin{cases} y \geq -1, & Q_t > 0 \\ y \geq 0, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (33)$$

である。また、単位時間の状態変化を  $h = j - i$ , とする。時刻が  $t$  から  $t+1$  になるときに、状態遷移確率  $r_{ij}$  で状態が  $i$  から  $j$  へ遷移する。そして時刻  $t+1$  で到着率  $\lambda_j$  のポアソン分布に従って  $A_j$  個のセルが到着する。 $Q_t > 0$  ならば  $y = A_j - 1$ ,  $Q_t = 0$  ならば  $y = A_j$  であるから、 $\mathbf{z} = (y, h)$  とすると、状態遷移確率  $P(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t + \mathbf{z})$  は、

$$P(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t + \mathbf{z}) = \begin{cases} \frac{\lambda_j^{y+1}}{(y+1)!} e^{-\lambda_j} r_{ij}, & Q_t > 0 \\ \frac{\lambda_j^y}{y!} e^{-\lambda_j} r_{ij}, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (34)$$

と与えられる。そして、 $P(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t + \mathbf{z})$  のモーメント母関数式(17)は、式(34)より、

$$\begin{aligned} & M_{\mathbf{X}_t}(\theta_0, \theta_1) \\ &= \begin{cases} \sum_{y=-1}^{\infty} \sum_{j=0}^1 e^{\theta_0 y} e^{\theta_1 t} \frac{\lambda_j^{y+1}}{(y+1)!} e^{-\lambda_j} r_{ij} \\ \quad = \sum_{j=0}^1 e^{-\theta_0} e^{-\lambda_j + \lambda_j e^{\theta_0}} r_{ij} e^{\theta_1(j-i)}, & Q_t > 0 \\ \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{j=0}^1 e^{\theta_0 y} e^{\theta_1 t} \frac{\lambda_j^y}{y!} e^{-\lambda_j} r_{ij} \\ \quad = \sum_{j=0}^1 e^{-\lambda_j + \lambda_j e^{\theta_0}} r_{ij} e^{\theta_1(j-i)}, & Q_t = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

となる。そこで、定理3を得る。

[定理3] 2状態MMPP/D/1において、状態を0,1とし、状態  $i$  での到着率を  $\lambda_i$ ,  $i = 0, 1$ , 状態  $i$  から  $j$  への状態遷移確率を  $r_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$  としたとき、式(34)に示す状態遷移確率  $P(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t + \mathbf{z})$  のモーメン

ト母関数  $M_{X_t}(\theta_0, \theta_1)$  は、

$$M_{X_t}(\theta_0, \theta_1) = \begin{cases} \sum_{j=0}^1 e^{-\theta_0} e^{-\lambda_j + \lambda_j e^{\theta_0}} r_{ij} e^{\theta_1(j-i)}, & Q_t > 0 \\ \sum_{j=0}^1 e^{-\lambda_j + \lambda_j e^{\theta_0}} r_{ij} e^{\theta_1(j-i)}, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (36)$$

となる。ここで、 $Q_t$  は時刻  $t$  におけるキュー長を表す。□

つぎに、

$$M_{X_t}(\theta_0^*, \theta_1^*) = 1 \quad (37)$$

を満たす  $\theta_0^*, \theta_1^*$  を数値的に求めるために式 (36), (37) より方程式

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^1 e^{-\theta_0^*} e^{-\lambda_j + \lambda_j e^{\theta_0^*}} r_{ij} e^{\theta_1^* j} = e^{\theta_1^* i}, & Q_t > 0 \\ \sum_{j=0}^1 e^{-\lambda_j + \lambda_j e^{\theta_0^*}} r_{ij} e^{\theta_1^* j} = e^{\theta_1^* i}, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (38)$$

を得る。但し、 $i = 0, 1$ , である。ここで、

$$R_{ij}(\theta_0^*) = \begin{cases} e^{-\theta_0^* - \lambda_j + \lambda_j e^{\theta_0^*}} r_{ij}, & Q_t > 0 \\ e^{-\lambda_j + \lambda_j e^{\theta_0^*}} r_{ij}, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (39)$$

と定義する。但し、 $i, j = 0, 1$ , である。更に、

$$\mathbf{a}(\theta_1^*) = \frac{1}{1 + e^{\theta_1^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\theta_1^*} \end{pmatrix} \quad (40)$$

と定義すると、 $R(\theta_0^*) = (R_{ij}(\theta_0^*))$ ,  $i, j = 0, 1$ , とし、式 (39), (40) より式 (38) は

$$R(\theta_0^*) \mathbf{a}(\theta_1^*) = \mathbf{1} \cdot \mathbf{a}(\theta_1^*) \quad (41)$$

の形で表される。式 (41) より行列  $R(\theta_0^*)$  は 1 を固有値にもつ。2×2 の単位行列を  $I$  とする。行列  $R(\theta_0^*) - I$  の行列式を  $|R(\theta_0^*) - I|$  とし、固有方程式、

$$|R(\theta_0^*) - I| = 0 \quad (42)$$

より  $\theta_0^*$  を得る。 $\theta_0^*$  が得られると、式 (41) の固有列ベクトル  $\mathbf{a}(\theta_1^*)$  より  $\theta_1^*$  を得る。 $\theta_0^*, \theta_1^*$  が得られ

ると、最適シミュレーション分布の状態遷移確率を  $P^*(X_t, X_t + z)$  とし式 (19) より、

$$P^*(X_t, X_t + z) = e^{\theta_0^* y} e^{\theta_1^* (j-i)} P(X_t, X_t + z) \quad (43)$$

を得る。以上より定理 4 を得る。

[定理 4] 2 状態 MMPP/D/1 において、状態を 0,1 とし、状態  $i$  での到着率を  $\lambda_i$ ,  $i = 0, 1$ , 状態  $i$  から  $j$  への状態遷移確率を  $r_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$ , としたとき、最適シミュレーション分布の到着率  $\lambda_i^*$ ,  $i = 0, 1$ , 状態遷移確率  $r_{ij}^*$ ,  $i, j = 0, 1$ , は、

$$\lambda_i^* = \begin{cases} e^{\theta_0^*} \lambda_i, & Q_t > 0 \\ \lambda_i, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (44)$$

$$r_{ij}^* = \begin{cases} e^{(\theta_j^* - \theta_i^* + \lambda_j^* - \lambda_j - \theta_0^*)} r_{ij}, & Q_t > 0 \\ r_{ij}, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (45)$$

で与えられる。ここで、 $Q_t$  は時刻  $t$  におけるキュー長を表し、 $\theta_0^*, \theta_1^*$  は式 (37) を満たす数値解である。また IS によって得られた標本値を真の分布の標本値に補償する重み関数は式 (43) より  $e^{-\theta_0^* y - \theta_1^* (j-i)}$ ,  $i, j = 0, 1$ , である。但し、 $y$  は単位時間のキュー長変化を表し、

$$\begin{cases} y \geq -1, & Q_t > 0 \\ y \geq 0, & Q_t = 0 \end{cases} \quad (46)$$

である。□

以上、2 状態 MMPP/D/1 の最適シミュレーション分布の導出方法を示したが、状態数が任意の MMPP/D/1 への拡張も可能である。

## 6. シミュレーション結果とその評価

我々が見いだした方法で導出した最適シミュレーション分布を用いて実際に IS によるシミュレーションを行った。結果を図 5, 図 6 に示す。

図 5 は通常の MC と IS による M/D/1 の比較結果である。図 5 は理論値もプロットした。図 6 は通常の MC と IS による 2 状態 MMPP/D/1 の比較結果である。図 5, 図 6 のシミュレーション回数は通常の MC, IS とともに同一の  $10^6$  回である。

### 6.1 高速性

$10^{-12}$  の特性を得るシミュレーションの高速性を評価する。図 5, 図 6 の結果とともに、IS では安定して特性が得られているが、通常の MC ではシミュレーショ



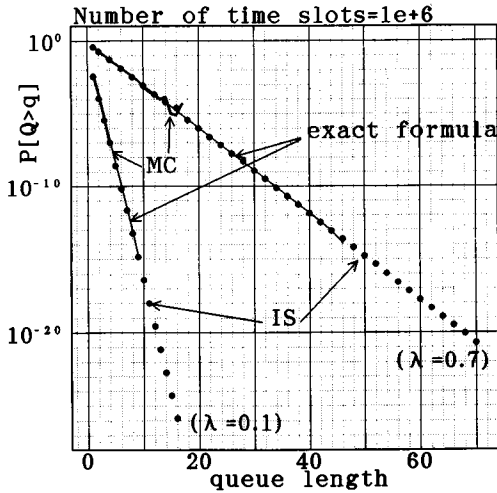


図5 M/D/1の  $P[Q > q]$  特性  
Fig.5  $P[Q > q]$  of M/D/1.

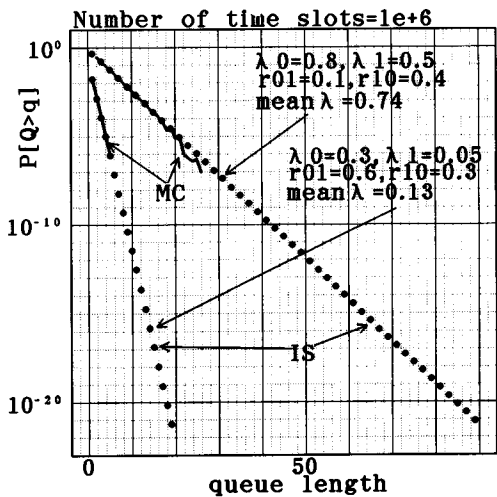


図6 2状態 MMPP/D/1の  $P[Q > q]$  特性  
Fig.6  $P[Q > q]$  of 2-state MMPP/D/1.

ン回数不足により特性が得られない。通常のMCでは経験則から  $10^{13}$  回のシミュレーション回数が必要である。故にISにより  $10^7$  倍の高速化が図れている。

### 6.2 95%信頼区間

図5, 図6の結果から  $10^{-12}$  付近の  $P[Q > q]$  の推定値について95%信頼区間を比較評価した。通常のMC法の95%信頼区間は  $10^{13}$  回のシミュレーションを行ったと仮定した場合の安全側の評価[3](p.158)を用いた。ISの95%信頼区間は  $10^6$  回のシミュレーション結果から得た値を用いた。結果は表1に示すと

表1 95%信頼区間

Table 1 95% confidence intervals of MC and IS estimates.

モデルと条件	95%信頼区間	
	通常のMC	IS
M/D/1 $\lambda = 0.1$ $P[Q > 7] = 1.6 \times 10^{-12}$	$1.5 \times 10^{-12}$	$3.1 \times 10^{-13}$
M/D/1 $\lambda = 0.7$ $P[Q > 39] = 1.8 \times 10^{-12}$	$1.5 \times 10^{-12}$	$2.2 \times 10^{-13}$
2状態 MMPP/D/1 平均 $\lambda = 0.13$ $P[Q > 10] = 3.3 \times 10^{-12}$	$1.5 \times 10^{-12}$	$4.2 \times 10^{-13}$
2状態 MMPP/D/1 平均 $\lambda = 0.74$ $P[Q > 52] = 2.6 \times 10^{-12}$	$1.5 \times 10^{-12}$	$3.3 \times 10^{-13}$

おりISのほうが良い95%信頼区間が得られている。

以上より、導出した最適シミュレーション分布の効果を評価した。そしてシミュレーションの高速化と95%信頼区間の改善に効果的である結果を示した。

通常のMC法の95%信頼区間は  $10^{13}$  回のシミュレーションを行ったと仮定した場合の安全側の評価[3](p.158)を用いた。

### 7. むすび

MCシミュレーションの高速化にIS法を用いる場合はシミュレーション分布の最適化が重要である。今回我々はISによるM/D/1および2状態MMPP/D/1の  $P[Q > q]$  の推定値を得るためのキューイングシミュレーションに対して、マルコフ連鎖とLarge Deviation Theoryを利用して最適シミュレーション分布を導出した。また、導出した最適シミュレーション分布でISシミュレーションを行い、シミュレーション分布の最適性とIS法の効果を示した。

今後、有限バッファモデルやより複雑なトラヒックモデルでのISの最適シミュレーション分布を導出する必要がある。

謝辞 本研究はNTT(日本電信電話(株))および東レ(株)の助成によって行われた。

### 文 献

- [1] C.E. Clark, "Importance Sampling in Monte Carlo Analysis," Opns. Res., pp.603-620, Spt. Oct. 1961.
- [2] K.S. Shanmugam and P. Balaban, "A Modified Monte-Carlo Simulation Technique for the Evaluation of Error Rate in Digital Communication Systems," IEEE Trans. Commun., vol.COM-28, no.11, pp.1916-1924, no.11, Nov. 1980.
- [3] M.C. Jeruchim, "Technique for Estimating the Bit

- Error Rate in Simulation of Digital Communication System," IEEE J. Select. Areas Commun., vol.SAC-2, no.1, pp.153-170, Jan. 1984.
- [4] P.W. Glynn and D.L. Iglehart, "Importance Sampling Stochastic Simulations," *Manag. Sci.*, vol.35, no.11, pp.1367-1391, Nov. 1989.
- [5] Q. Wang and V.S. Frost, "Efficient Estimation of Cell Blocking Probability for ATM Systems," *IEEE ACM Trans. Net.*, vol.1, no.2, April 1993.
- [6] M. Devetsikiotis and K. Townsend, "Statistical Optimization of Dynamic Importance Sampling Parameters for Efficient Simulation of Communication Networks," *IEEE/ACM Trans. Net.*, vol.1, no.3, June 1993.
- [7] 村田正幸, 宮原秀夫, "通信トラヒック理論とその応用 (III)," *信学誌*, vol.77, no.12, pp.1249-1255, Dec. 1994.
- [8] 恩田和幸, "ATM バーストセルトラヒックモデル化法の研究," 長岡技科大修士論文, 1994.
- [9] J.A. Bucklew, "Large Deviation Techniques in Decision, Simulation, and Estimation," A Wiley-interscience Publication John Wiley and Sons, Inc.
- [10] M. Cottrell, J.-C. Fort, and G. Malgouyres, "Large Deviation and Rare Events in the Study of Stochastic Algorithms," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.AC-28, no.9, pp.907-920, Sept. 1983.
- [11] H. Heffs and D.M. Lucantoni, "A Markov Modulated Characterization of Packetized Voice and Data Traffic Related Stastical Multiplexer Performance," *IEEE J. on Select. Area in Commun.*, vol.SAC-4, no.6, pp.856-867, Sept. 1986.
- [12] T. Okuda, et al., "A Simplified Performance Evaluation for Packetized Voice System," *IEICE Trans.*, vol.E73, no.6, June 1990.
- [13] 平野美貴, 渡部直也, "ATM 交換機におけるバーストトラヒック多重化特性の評価," *信学論 (B-I)*, vol.J72-B-I, no.4, pp.264-271, April 1989.
- [14] 小峯隆宏, 山田博司, "音声, 映像混合入力下での ATM セル多重化特性の解析," *信学論 (B-I)*, vol.J75-B-I, no.8, pp.509-516, Aug. 1992.
- [15] 酒井孝和, "インポートランスサンプリングを用いた符号化変調系の特性評価法," 長岡技科大修士論文, 1994.
- [16] 中川健治, "Loss and Wating Time Probability Approxiamtion for General Queueing," *IEICE Trans. Commun.*, vol.E76-B, no.11, pp.1381-1388, Nov. 1993.
- [17] 中川健治, "インポートランスサンプリングシミュレーション法における Markov Twisted Distribution について," '95 信学信越支大予稿集, pp.205-206.
- [18] 中川健治, "インポートランスサンプリングシミュレーション法における Markov Twisted Distribution について," 情報理論とその応用シンポジウム予稿集, pp.489-492, Oct. 1995.
- [19] 小川耕司, 中川健治, "インポートランスサンプリングを用いた MMPP/D/1 のセル廃棄率シミュレーション," 1995 信学信越支大予稿集, pp.195-196.
- [20] 小川耕司, 中川健治, "インポートランスサンプリングシミュレーション法における最適シミュレーション分布の導出," 情報通信ネットワークに関する性能評価モデルの総合的研究シンポジウム報文集, pp.421-431, Jan. 1996.
- [21] 小川耕司, 中川健治, "インポートランスサンプリングシミュレーション法における最適シミュレーション分布," 1996 信学総全大.
- [22] 中川健治, 小川耕司, "MMPP/D/1 セル廃棄率の簡単で精度のよい近似値," 1996 信学総全大.  
(平成 8 年 3 月 26 日受付, 8 月 16 日再受付)



小川 耕司 (正員)

昭 58 和歌山高専・電気卒。同年東レ (株) 入社。平 8 長岡技科大・工・電気電子システム卒。同年東レ (株) 復社。



中川 健治 (正員)

昭 55 東工大・理・数学卒。昭 60 同大学院博士課程満期退学。昭 60 NTT 研究所入社。平 4 長岡技術科学大学工学部助教授。理博。情報理論, 待ち行列理論等の研究に従事。IEEE, 情報理論とその応用学会, 日本数学会各会員。