

パケットネットワークにおける平均系内時間の近似解析

坂本 将清[†] 中川 健治^{††a)} 恩田 和幸^{†††} 齋藤 茂^{††††}

Approximation for the Average Soujourn Time in a Packet Network

Masakiyo SAKAMOTO[†], Kenji NAKAGAWA^{††a)}, Kazuyuki ONDA^{†††},
and Shigeru SAITO^{††††}

あらまし 待ち行列からの退去過程は一般に複雑なものとなるため、ネットワークのあるノードからの退去過程をそのまま次ノードへの到着過程とすると解析は困難となる。従来は解析を容易にするため、ネットワークを Jackson 網と仮定し、すなわち到着をポアソン過程、サービスを指数サービスとして解析が行われていた。しかしポアソン過程では、実際のパケットネットワークにおけるバーストラフィックを表現するには不十分である。米倉ら [1] は、到着過程をバースト性が表現できる 2 状態 MMPP (Markov Modulated Poisson Process) へ拡張し、サービスを指数サービスとするモデルの解析を行った。本研究ではサービス時間分布を相型分布へ拡張し、到着過程を 2 状態 MMPP とするネットワークにおいて、各ノードの平均系内時間を解析する。モデルの拡張に伴い、本研究では米倉らの解析手法を修正、拡張した。本研究の提案法による平均系内時間の近似値は、米倉らによる従来法よりも精度が良く、計算量も少ないことを示す。

キーワード 待ち行列、平均系内時間、MMPP、相型分布

1. ま え が き

本研究ではパケットネットワークにおける end-to-end 遅延時間を評価することを目的として、ネットワーク上の各ノードを待ち行列でモデル化し平均系内時間を解析する。従来ではネットワークを Jackson 網と仮定し、つまりパケットの到着過程をポアソン過程、サービスを指数サービスとして解析が行われてきた。Jackson 網ではノードからの退去過程もポアソン過程となるから、各ノードは M/M/1 待ち行列として容易に解析できる。しかし現実のパケットトラフィックはバースト的であるためポアソン過程では不十分である。そこでバースト性が表現できる 2 状態 MMPP

(Markov Modulated Poisson Process) へ到着過程を拡張したモデルの解析が米倉ら [1] によって行われた。米倉ら [1] は、複雑な退去過程を 2 状態 MMPP モデルで近似し解析する方法を提案した。

本研究ではサービスモデルの拡張を行う。各ノードにおけるサービス時間はパケット長に比例するが、例えば IP トラフィックでは 40 Byte、及び 1500 Byte のパケットの割合が他に比べて多いことが知られている [2]。前者は TCP の最小パケットサイズであり、後者は Ethernet における MTU (Maximum Transfer Unit: 最大パケット長) のパケットである。このようにパケットトラフィックが、ある特定のパケット長の割合だけ多いという特徴をもつ場合、指数サービスでは不十分である。そこで本研究では、サービス時間分布を任意の確率分布を近似可能な相型分布へ拡張し、到着過程を 2 状態 MMPP とするモデルを解析する。

また本研究でも退去過程を 2 状態 MMPP モデルで近似する。近似において 2 状態 MMPP のパラメータを決定するための近似条件が必要である。米倉ら [1] によって提案された従来の近似条件では、サービス時間分布を相型分布へ拡張した場合には問題がある。そこで本研究では新たな近似条件を提案する。そして従来条件と提案条件によって退去過程を 2 状態 MMPP で

[†] パナソニックコミュニケーションズ株式会社, 東京都
Panasonic Communications Co., Ltd., 2-3-8 Shimomoguro,
Meguro-ku, Tokyo, 153-8687 Japan

^{††} 長岡技術科学大学, 長岡市
Department of Electrical Engineering, Nagaoka University
of Technology, Nagaoka-shi, 940-2188 Japan

^{†††} NTT アドバンステクノロジー株式会社, 武蔵野市
NTT Advanced Technology Co. Ltd., 2-4-15 Nakamachi,
Musashino-shi, 180-0006 Japan

^{††††} 立命館大学, 草津市
Faculty of Science and Engineering, Ritsumeikan University,
1-1-1 Noji-higashi, Kusatsu-shi, 525-8577 Japan
a) E-mail: nakagawa@nagaokaut.ac.jp

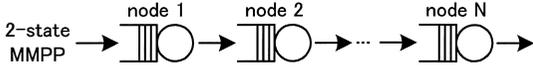


図 1 直列型ネットワーク
Fig. 1 Tandem network.

近似し各ノードにおける平均系内時間を解析したとき、提案条件による近似値が従来よりもシミュレーション値に近く、また従来よりも高速な解析が可能であることを示す。

2. ネットワークモデル

本研究ではトラフィックの合流がないパケットネットワークを考える。このとき end-to-end 遅延時間は、図 1 に示す直列型ネットワークを解析することで得られる。本研究ではノード 1 へのパケットの到着過程を 2 状態マルコフ変調ポアソン過程 (Markov Modulated Poisson Process, MMPP) とし、各ノードでのサービス時間分布を相型分布 (phase type distribution, PH), バッファサイズを無限大とする。ノード 1 からの退去過程をマルコフ型到着過程 (Markovian Arrival Process, MAP) によって近似表現する。そして、ノード 2 以降では前段のノードからの退去過程が次ノードへの到着過程となる。以下において、マルコフ型到着過程 (MAP), マルコフ変調ポアソン過程 (MMPP), 相型分布 (PH) について説明する。

2.1 マルコフ型到着過程

マルコフ型到着過程 (Markovian Arrival Process, MAP) は、連続時間マルコフ連鎖 $\{I(t)\}$ の各状態 $\{0, 1, \dots, M-1\}$ にそれぞれ一つのポアソン過程が対応した到着過程である。 $\{I(t)\}$ の状態推移には、到着を伴わない推移と到着を伴う推移の 2 種類があり、それぞれの推移速度行列を D_0, D_1 とする。 (D_0, D_1) は MAP の表現と呼ばれ、以降は $\text{MAP}(D_0, D_1)$ という表記方法を用いる。また $D = D_0 + D_1$ は $\{I(t)\}$ の推移速度行列である。 $\nu D = 0, \nu \mathbf{1}^\top = 1$ を満たす ν を、 $\text{MAP}(D_0, D_1)$ の定常分布という^(注1)。

$\text{MAP}(D_0, D_1)$ における $(0, t]$ での到着数を $N(t)$ とする。文献 [3] より平均 $E[N(t)]$, 平均到着率 λ_{avg} は、

$$E[N(t)] = \nu D_1 \mathbf{1}^\top t \quad (1)$$

$$\lambda_{avg} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \nu D_1 \mathbf{1}^\top \quad (2)$$

となり、分散 $V[N(t)]$ は

$$V[N(t)] = 2\nu D_1 [\exp\{Dt\} - I - Dt] \times (D - \mathbf{1}^\top \nu)^{-2} D_1 \mathbf{1}^\top + \nu D_1 \mathbf{1}^\top t \quad (3)$$

となる。また分散と時間の比 $V[N(t)]/t$ の、 $t \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ における極限值は次のようになる。

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{V[N(t)]}{t} = \nu D_1 \mathbf{1}^\top \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V[N(t)]}{t} = -2\nu D_1 D (D - \mathbf{1}^\top \nu)^{-2} D_1 \mathbf{1}^\top + \nu D_1 \mathbf{1}^\top \quad (5)$$

2.2 マルコフ変調ポアソン過程

マルコフ変調ポアソン過程 (Markov Modulated Poisson Process, MMPP) は、MAP において到着を伴う $\{I(t)\}$ の状態推移を禁止した到着過程であり、 D_1 の非対角要素がすべて 0 となる。2 状態 MMPP は、

$$D_0 = \begin{bmatrix} -\lambda_0 - q_0 & q_0 \\ q_1 & -\lambda_1 - q_1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

の表現をもつ。2 状態 MMPP の定常分布 ν は、

$$\nu = \frac{1}{q_0 + q_1} [q_1, q_0] \quad (7)$$

である。平均到着率、分散は式 (2), (3) より

$$\lambda_{avg} = \frac{\lambda_1 q_0 + \lambda_0 q_1}{q_0 + q_1} \quad (8)$$

$$V[N(t)] = \lambda_{avg} t + 2At - \frac{2A}{q_0 + q_1} [1 - e^{-(q_0 + q_1)t}] \quad (9)$$

となる。ここで、

$$A = \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)^2 q_0 q_1}{(q_0 + q_1)^3}$$

とおいた。

2.3 連続相型分布

連続相型分布 (phase type distribution, PH) は、状態 $1, 2, \dots, H$ を一時的状態、状態 0 を吸収状態とする連続時間吸収マルコフ連鎖 $\{J(t)\}$ の吸収時間分布として定義される。 $\{J(t)\}$ の推移速度行列を

$$Q^* = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{s}^\top & S \end{bmatrix} \quad (10)$$

(注1): $\mathbf{0}$ は全要素が 0 の行ベクトル。 $\mathbf{1}^\top$ は全要素が 1 の列ベクトル。

とする．ここで $s^\top = -S1^\top$ である．時刻 $t = 0$ における一時的状態の分布を $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_H]$ とする． (α, S) は相型分布の表現と呼ばれる．例えば平均 μ^{-1} ，ステージ数 r のアーラン分布は

$$\alpha = [1, 0, \dots, 0], S = \begin{bmatrix} -r\mu & r\mu & & O \\ & -r\mu & \ddots & \\ & & \ddots & r\mu \\ O & & & -r\mu \end{bmatrix}$$

によって定まる相型分布である．ここで α の要素数は r ， S は $r \times r$ の正方行列であり， $r = 1$ とすれば指数分布が得られる．またアーラン分布においてステージ数 r を大きくすると一点分布に近づくから，サービス時間一定の場合も相型分布によって任意の精度で近似が可能である．更に $[0, \infty)$ 上の一般分布は一点分布の混合によって近似できる．相型分布は混合について閉じているから， $[0, \infty)$ 上の任意の分布を相型分布により近似できる．

3. MAP/PH/1 待ち行列について

3.1 MAP/PH/1 の定常分布

MAP(D_0, D_1) を到着過程とし，サービス時間分布を表現 (α, S) の相型分布とする待ち行列 MAP/PH/1 を考える．時刻 t での系内数を $L(t)$ ，MAP の状態を $I(t)$ ，相型分布の状態を $J(t)$ と表し，3次元の状態空間をもつ連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t)\} = \{L(t), I(t), J(t)\}$ を考える．以下では $L(t)$ の値をレベル， $I(t), J(t)$ の値をフェーズと呼ぶ．状態を辞書式順序に並べたとき， $\{X(t)\}$ の推移速度行列は次式の構造をもつ．

$$Q = \begin{bmatrix} B_1 B_0 & & O \\ B_2 A_1 A_0 & & \\ & A_2 A_1 A_0 & \\ & & \ddots \ddots \ddots \\ O & & & \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} B_0 &= D_1 \otimes \alpha, B_1 = D_0, B_2 = I_M \otimes s^\top \\ A_0 &= D_1 \otimes I_H, A_1 = I_M \otimes S + D_0 \otimes I_H \\ A_2 &= I_M \otimes s^\top \alpha \end{aligned}$$

ここで I_M, I_H はそれぞれ $M \times M, H \times H$ 単位行列である． $\pi Q = 0, \pi 1^\top = 1$ を満たす定常分布 π は行列幾何形式，

$$\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_1 R, \pi_1 R^2, \dots] \quad (12)$$

で与えられる．ここで π_0, π_1 は，

$$\pi_0 B_1 + \pi_1 B_2 = 0, \pi_0 1^\top + \pi_1 (I - R)^{-1} 1^\top = 1 \quad (13)$$

の解である．また行列 R は

$$R^2 A_2 + R A_1 + A_0 = O \quad (14)$$

を満たす非負最小行列であり，率行列と呼ばれる [3]．

3.2 MAP/PH/1 の平均系内時間

MAP/PH/1 の平均系内時間 \bar{W} は，平均系内数 \bar{N} と平均到着率 λ_{avg} を用いてリトルの公式から，

$$\bar{W} = \bar{N} / \lambda_{avg} \quad (15)$$

で計算できる． $\bar{N} = \pi_1 (I - R)^2 1^\top$ で与えられる [3]．

3.3 MAP/PH/1 からの退去過程

図 1 においてノード 1 の待ち行列は式 (11) の推移速度行列 Q をもつ MAP/PH/1 となる．ノード 1 からの退去過程は Q を退去を伴わない推移速度行列 U_0 と伴う推移速度行列 U_1 に分解することで導かれる．

$$U_0 = \begin{bmatrix} B_1 B_0 & & O \\ & A_1 A_0 & \\ & & A_1 A_0 \\ & & & \ddots \ddots \ddots \\ O & & & \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$U_1 = Q - U_0 \quad (17)$$

MAP(U_0, U_1) は無限大の状態数をもつため，ノード 2 以降の解析を行うためには，MAP(U_0, U_1) を有限状態の MAP で近似する必要がある．

3.4 レベル K で切詰め

MAP/PH/1 においてレベル $K, K+1, \dots, (K > 1)$ をまとめて \hat{K} とする．MAP/PH/1 において $L(t)$ が K 以上で推移している間の退去間隔はサービスと同じ相型分布に従うから，退去過程は次の MAP(\hat{U}_0, \hat{U}_1) で近似できる [4]．

$$\hat{U}_0 = \begin{bmatrix} B_1 B_0 & O \\ A_1 A_0 & \\ & \ddots \\ & & A_1 E_0 \\ O & E_1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\hat{U}_1 = \begin{bmatrix} O & O \\ B_2 O & \\ A_2 O & \\ & \ddots \\ O & E_2 E_3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$E_0 = D_1 \mathbf{1}^\top \otimes I, \quad E_1 = S, \quad E_2 = s^\top \mathbf{y}_{K-1} \\ E_3 = (1 - \mathbf{y}_{K-1} \mathbf{1}^\top) s^\top \alpha$$

ここで \mathbf{y}_{K-1} は、レベル K 以上でそれぞれのサービスが終了し、レベル $K-1$ へ帰還した直後の各フェーズの分布を表し、次式によって与えられる。

$$\mathbf{y}_{K-1} = \frac{\mathbf{x}_{K-1}}{\mathbf{x}_{K-1} \mathbf{1}^\top} \quad (20)$$

式 (20) の \mathbf{x}_{K-1} は、退去発生という条件付きでのレベル $K-1$ のフェーズの分布を表し、次式で与えられる。

$$\mathbf{x}_{K-1} = \pi_1 R^{K-1} A_2 (\nu D_1 \mathbf{1}^\top)^{-1}, \quad K > 1$$

MAP(\hat{U}_0, \hat{U}_1) の定常分布 $\hat{\nu}$ は、

$$\hat{\nu} = [\pi_0, \pi_1, \pi_1 R, \dots, \pi_1 R^{K-2}, \\ \pi_1 R^{K-1} (I_{MH} - R)^{-1} (\mathbf{1}^\top \otimes I_M)] \quad (21)$$

として得られる。ここで R は式 (14) で与えられる率行列であり、 $\mathbf{1}^\top$ は要素数 M の列ベクトル、 I_{MH} は $M \cdot H \times M \cdot H$ 単位行列である。

図 1 でノード 1 からの退去過程を MAP(\hat{U}_0, \hat{U}_1) で近似したとき、その状態数は $m_1 = 2 + 2KH - H$ となる。正確な近似を得るには、トラヒック強度が高いほど K を大きくしなければならない。またノード 2 以降でも MAP(\hat{U}_0, \hat{U}_1) によって退去過程を近似したとき、ノード n での状態数は $m_n = m_{n-1} + m_{n-1}KH - H$ となる。このように後のノードほど状態数が増加するため、計算量が増加し解析が困難となる。

4. 2 状態 MMPP による退去過程の近似

米倉ら [1] は 2 状態 MMPP モデルによって退去過程を近似する手法を提案した。この近似によって全

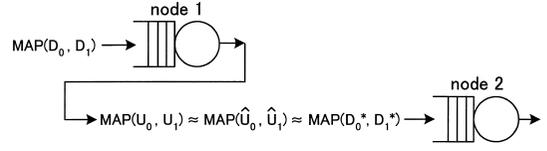


図 2 状態 MMPP による退去過程の近似

Fig. 2 Approximation of the departure process by 2-state MMPP.

ノードへの到着過程を 2 状態 MMPP とすることができ、解析が容易になる。

図 2 に示すように、ノード 1 への到着過程である 2 状態 MMPP を MAP(D_0, D_1) と表し、退去過程である MAP(U_0, U_1) を式 (18), (19) で与えられる MAP(\hat{U}_0, \hat{U}_1) で近似する。更に MAP(\hat{U}_0, \hat{U}_1) を 2 状態 MMPP である MAP(D_0^*, D_1^*) で近似する。ここで D_0^*, D_1^* は

$$D_0^* = \begin{bmatrix} -\lambda_0^* - q_0^* & q_0^* \\ q_1^* & -\lambda_1^* - q_1^* \end{bmatrix}, \quad D_1^* = \begin{bmatrix} \lambda_0^* & 0 \\ 0 & \lambda_1^* \end{bmatrix}$$

であり、パラメータ $\lambda_0^*, \lambda_1^*, q_0^*, q_1^*$ を決定するための近似条件が必要である。

4.1 必要十分条件

Bean [4] によると、MAP(\hat{U}_0, \hat{U}_1) と MAP(D_0^*, D_1^*) が確率過程として一致するための必要十分条件は、任意の自然数 k と任意の実数 $t_1, \dots, t_k \in [0, \infty)$ に対して次式が成り立つことである。

$$\frac{\hat{\nu} e^{\hat{U}_0 t_1} \hat{U}_1 e^{\hat{U}_0 t_2} \dots \hat{U}_1 e^{\hat{U}_0 t_k} \hat{U}_1 \mathbf{1}^\top}{\hat{\nu} e^{\hat{U}_0 t_1} \hat{U}_1 e^{\hat{U}_0 t_2} \dots \hat{U}_1 e^{\hat{U}_0 t_k} \mathbf{1}^\top} \\ = \frac{\nu^* e^{D_0^* t_1} D_1^* e^{D_0^* t_2} \dots D_1^* e^{D_0^* t_k} D_1^* \mathbf{1}^\top}{\nu^* e^{D_0^* t_1} D_1^* e^{D_0^* t_2} \dots D_1^* e^{D_0^* t_k} \mathbf{1}^\top} \quad (22)$$

ここで ν^* は MAP(D_0^*, D_1^*) の定常分布を表す。米倉ら [1] は、式 (22) において k と t_1, \dots, t_k を特別な値に限定したものを近似条件としている。

4.2 従来の近似条件 (従来法)

米倉ら [1] により提案された近似条件を示す。

- 条件 i) $\hat{\nu} \hat{U}_1 \mathbf{1}^\top = \nu^* D_1^* \mathbf{1}^\top$
- 条件 ii) $\hat{\nu} \hat{U}_1^2 \mathbf{1}^\top = \nu^* D_1^{*2} \mathbf{1}^\top$
- 条件 iii) $g(\hat{U}_0) = g(D_0^*)$
- 条件 iv) $\bar{W}_1 = \bar{W}_2$

ここで $g(\hat{U}_0), g(D_0^*)$ は、それぞれ行列 \hat{U}_0, D_0^* の最大固有値を表す。また \bar{W}_1 は MAP(\hat{U}_0, \hat{U}_1) をノード 2 への到着過程としたときのノード 2 における平

均系内時間を表し、 \bar{W}_2 は $\text{MAP}(D_0^*, D_1^*)$ を到着過程としたときの同様の値を表す。以下で各条件について説明する。

4.2.1 条件 i)

条件 i) は式 (22) で $k = 1, t_1 = 0$ として得られる。条件 i) は $\text{MAP}(\hat{U}_0, \hat{U}_1)$ と $\text{MAP}(D_0^*, D_1^*)$ の平均到着率が一致することを要請する。

4.2.2 条件 ii)

条件 ii) は $k = 2, t_1 = 0, t_2 = 0$ とし、条件 i) を適用して得られる。

4.2.3 条件 iii)

条件 iii) は $k = 1, t_1 \rightarrow \infty$ として得られる。

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\hat{\nu} e^{\hat{U}_0 t_1} \hat{U}_1 \mathbf{1}^\top}{\hat{\nu} e^{\hat{U}_0 t_1} \mathbf{1}^\top} = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{\nu^* e^{D_0^* t_1} D_1^* \mathbf{1}^\top}{\nu^* e^{D_0^* t_1} \mathbf{1}^\top}$$

上式の両辺は、それぞれ行列 \hat{U}_0, D_0^* の最大固有値に収束する [1]。よって条件 iii) は、行列 \hat{U}_0, D_0^* の最大固有値が一致することを要請する。

4.2.4 条件 iv)

$\text{MAP}(\hat{U}_0, \hat{U}_1)$ をノード 2 への到着過程としたときの、ノード 2 における平均系内時間 \bar{W}_1 と、 $\text{MAP}(D_0^*, D_1^*)$ としたときの平均系内時間 \bar{W}_2 が等しくなることを要請する。

4.2.5 パラメータの決定

$\lambda_0^*, \lambda_1^*, q_0^*, q_1^*$ のうち一つを x とおき、残りの三つを条件 i) ii) iii) から x の関数として表す。そして、条件 iv) を満たす x をニュートン法により探索する。

4.2.6 従来法の問題点

サービス時間分布を相型分布へ拡張したときの、従来法の問題点について述べる。まず条件 ii) において右辺の D_1^* は対角行列であるから $D_1^{*2} \neq O$ である。対して左辺では $\hat{U}_1^2 = O$ となるケースがあり^(注2)、この場合は従来法により退去過程を 2 状態 MMPP モデルで近似することは不可能である。

更に条件 iv) では平均系内時間を解析する必要があり、このための計算量は相型分布の状態数が大きいほど増大するため、近似が困難となる。

4.3 提案する近似条件 (提案法)

本研究で提案する近似条件について述べる。本研究では問題がある従来の条件 ii) 条件 iv) を変更する。以下では $(0, t]$ における $\text{MAP}(\hat{U}_0, \hat{U}_1)$ 及び $\text{MAP}(D_0^*, D_1^*)$ の到着数をそれぞれ $\hat{N}(t), N^*(t)$ とする。 $\text{MAP}(\hat{U}_0, \hat{U}_1)$ 及び $\text{MAP}(D_0^*, D_1^*)$ のそれぞ

れの分散と時間の比を次のように定義する。

$$\hat{v}(t) \equiv \frac{V[\hat{N}(t)]}{t}, \quad v^*(t) \equiv \frac{V[N^*(t)]}{t} \quad (23)$$

更に $\hat{v}(t), v^*(t)$ それぞれの $t \rightarrow \infty$ における極限値を $\hat{v}(\infty), v^*(\infty)$ とする。これらは式 (5) で与えられる。本研究で提案する条件を次に示す。

$$\text{条件 1) } \hat{\nu} \hat{U}_1 \mathbf{1}^\top = \nu^* D_1^* \mathbf{1}^\top$$

$$\text{条件 2) } g(\hat{U}_0) = g(D_0^*)$$

$$\text{条件 3) } \hat{v}(t_1) = v^*(t_1)$$

$$\text{条件 4) } \hat{v}(\infty) = v^*(\infty)$$

4.3.1 条件 3) と条件 4) について

条件 1), 2) は米倉らの条件 i), iii) と同じである。トラヒックのもつバースト性が平均系内時間に影響を与えるので、 $\text{MAP}(\hat{U}_0, \hat{U}_1)$ と $\text{MAP}(D_0^*, D_1^*)$ のバースト性を近似することを考える。バースト性は分散 $V[\hat{N}(t)]$ と $V[N^*(t)]$ によって規定されると考えられるので、理想的にはすべての時間区間 $0 \leq t < \infty$ にわたって $V[\hat{N}(t)]$ と $V[N^*(t)]$ を一致させることが望ましい。しかしそれは困難であるため、条件 3), 4) では $\text{MAP}(\hat{U}_0, \hat{U}_1)$ と $\text{MAP}(D_0^*, D_1^*)$ の分散と時間の比を $t = t_1$ と $t = \infty$ の 2 点で一致させる。ここで t_1 は、曲線 $\hat{v}(t)$ に $v^*(t)$ が最も近似できる位置に設定する。

また本論文では、トラヒック強度に関係なく $K = 10$ として $\text{MAP}(\hat{U}_0, \hat{U}_1)$ を得る。

4.3.2 t_1 の決定方法

式 (4) より、式 (23) で与えられる $\hat{v}(t)$ は $t \rightarrow 0$ のとき $\text{MAP}(\hat{U}_0, \hat{U}_1)$ の平均到着率 $\hat{\lambda}_{avg}$ に収束する。本研究では t_1 を、

$$\hat{v}(t_1) = \frac{\hat{\lambda}_{avg} + \hat{v}(\infty)}{2} \quad (24)$$

から求める。式 (24) は経験的に得た決定方法であり、指数サービスの場合に良好な近似結果が得られる。また本論文では指数サービス以外のサービスモデルについても式 (24) から t_1 を決定する。また式 (24) を t_1 について解くことは困難であるが、指数サービスの場合は以下のような方法で t_1 の近似値が得られる。

指数サービスにおける $\hat{v}(t)$ の $t \rightarrow 0$ における接線 $f_1(t)$ を求める。この接線の傾き ρ は、

$$\rho = \hat{\nu} \hat{U}_1^2 \mathbf{1}^\top - (\hat{\nu} \hat{U}_1 \mathbf{1}^\top)^2 \quad (25)$$

(注2): 例えばサービス時間分布がアーラン分布のとき。

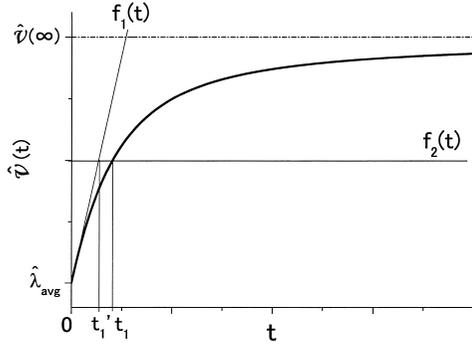

 図 3 指数サービスにおける t_1 の決定方法

 Fig. 3 The determination method of t_1 in case of exponential service.

と計算され、切片は $\hat{\lambda}_{avg}$ である。そして図 3 のように、

$$f_1(t) = \rho t + \hat{\lambda}_{avg}$$

$$f_2(t) = \frac{\hat{\lambda}_{avg} + \hat{v}(\infty)}{2}$$

が交差する点 t'_1 を t_1 の代わりに用いる。アーランサービスの場合は $U_1^2 = 0$ となるから、式 (25) より $\rho < 0$ である。よってアーランサービスの場合の $\hat{v}(t)$ は、指数サービスの場合とは性質が異なる。アーランサービスの場合も式 (24) から t_1 を決定するが、指数サービスのように $t \rightarrow 0$ における接線を利用することができないため、数値的に t_1 を決定する。

アーランサービスに対しても式 (24) を使う理由は、指数サービスに対して精度の良い近似が得られていることと、アーランサービスはステージ数 $r = 1$ とすれば指数サービスとなるのでアルゴリズムの一貫性のためである。しかし、 t_1 の決め方については指数サービス、アーランサービスとももっと良い方法があれば精度が向上する。これについては 6.1 で議論する。

4.4 パラメータの決定

条件 1) ~ 4) よりそれぞれ次の 4 式が得られる。

$$\frac{\lambda_1^* q_0^* + \lambda_0^* q_1^*}{q_0^* + q_1^*} = \hat{\lambda}_{avg} \quad (26)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ -\lambda_0^* - \lambda_1^* - q_0^* - q_1^* + \sqrt{(\lambda_0^* + \lambda_1^* + q_0^* + q_1^*)^2 - 4(\lambda_0^* \lambda_1^* + \lambda_1^* q_0^* + \lambda_0^* q_1^*)} \right\} = \hat{\theta} \quad (27)$$

$$\frac{1 - e^{-(q_0^* + q_1^*)t_1}}{(q_0^* + q_1^*)t_1} = \frac{\hat{v}(\infty) - \hat{v}(t_1)}{\hat{v}(\infty) - \hat{\lambda}_{avg}} \quad (28)$$

$$\frac{2(\lambda_0^* - \lambda_1^*)^2 q_0^* q_1^*}{(q_0^* + q_1^*)^3} = \hat{v}(\infty) - \hat{\lambda}_{avg} \quad (29)$$

ここで、式 (27) では $g(\hat{U}_0) = \hat{\theta}$ とした。また

$$q^* = q_0^* + q_1^* \quad (30)$$

とおくと式 (28) は

$$\frac{1 - e^{-q^* t_1}}{q^* t_1} = \frac{\hat{v}(\infty) - \hat{v}(t_1)}{\hat{v}(\infty) - \hat{\lambda}_{avg}} \quad (28')$$

となり、ニュートン法によって q^* が決定できる。式 (26), (27), (29), (30) の連立方程式を $\lambda_0^*, \lambda_1^*, q_0^*, q_1^*$ について解き、

$$\lambda_0^* = \frac{a}{4(\hat{\lambda}_{avg} + \hat{\theta})} \quad (31)$$

$$\lambda_1^* = \frac{2\hat{\lambda}_{avg}(\lambda_0^* - \hat{\lambda}_{avg}) - q^* c}{2(\lambda_0^* - \hat{\lambda}_{avg})} \quad (32)$$

$$q_0^* = \frac{2(\lambda_0^* - \hat{\lambda}_{avg})^2 q^*}{2(\lambda_0^* - \hat{\lambda}_{avg})^2 + q^* c} \quad (33)$$

$$q_1^* = q^* - q_0^* \quad (34)$$

が得られる。ここで、

$$a = b + \sqrt{b^2 + 8(\hat{\lambda}_{avg} + \hat{\theta})\{2d\hat{\lambda}_{avg} + \hat{\theta}q^*c\}}$$

$$b = 2(\hat{\lambda}_{avg} + \hat{\theta})(\hat{\lambda}_{avg} - \hat{\theta} - q^*) + q^* c$$

$$c = \hat{v}(\infty) - \hat{\lambda}_{avg}$$

$$d = (\hat{\lambda}_{avg} + \hat{\theta})(q^* + \hat{\theta})$$

とおいた。

5. 提案法と従来法の比較

図 1 において $N = 10$ としたときの、各ノードの平均系内時間のシミュレーション値 (sim) と、従来法 (yonekura), 提案法 (proposed) を比較する。ノード 1 への到着である 2 状態 MMPP のパラメータを $(\lambda_0, \lambda_1, q_0, q_1) = (1.0, 0.0, 0.01, 0.01)$ とする。サービスとして指数サービスとステージ数 $r = 2, 10$ のアーランサービスを考える。ノード n におけるサービスとして表 1 に示す \mathcal{M}_1 と \mathcal{M}_2 の 2 種類について調べる。 \mathcal{M}_1 は基本的な検討のためにすべてのノードのサービス率が等しい場合であり、 \mathcal{M}_2 はネットワークの end 側のサービス率が低くコア側のサービス率が高い場合をモデル化している。結果を図 4 ~ 図 9 に示す。

表 1 各ノードのサービス率
Table 1 Service rate of each node.

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8	μ_9	μ_{10}
\mathcal{M}_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
\mathcal{M}_2	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1

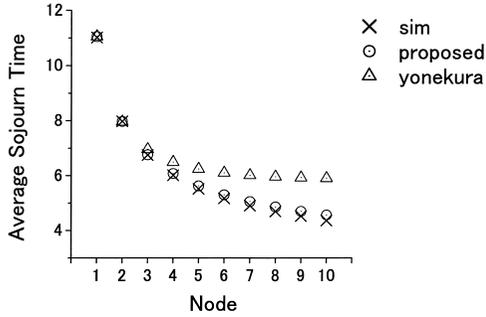


図 4 各ノードの平均系内時間 (指数サービス, \mathcal{M}_1)
Fig. 4 Average sojourn time at each node in case of exponential service and service rate is \mathcal{M}_1 .

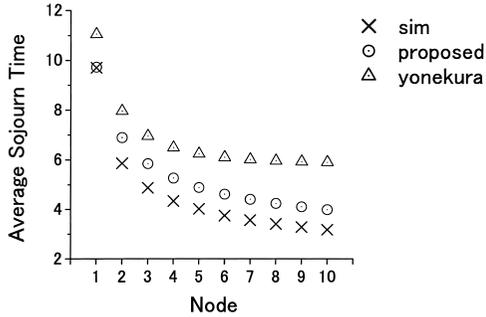


図 5 各ノードの平均系内時間 (アーランサービス, \mathcal{M}_1)
Fig. 5 Average sojourn time at each node in case of Erlang service ($r = 2$) and service rate is \mathcal{M}_1 .

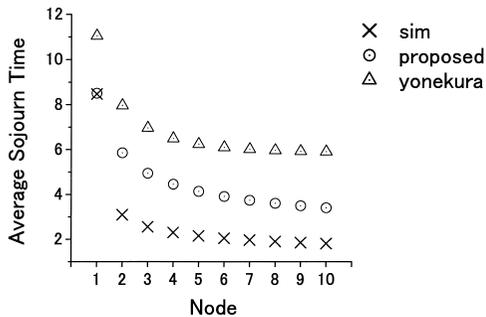


図 6 各ノードの平均系内時間 (アーランサービス, \mathcal{M}_1)
Fig. 6 Average sojourn time at each node in case of Erlang service ($r = 10$) and service rate is \mathcal{M}_1 .

6. 考 察

6.1 近似精度について

指数サービスの場合 (図 4, 図 7), 提案法による

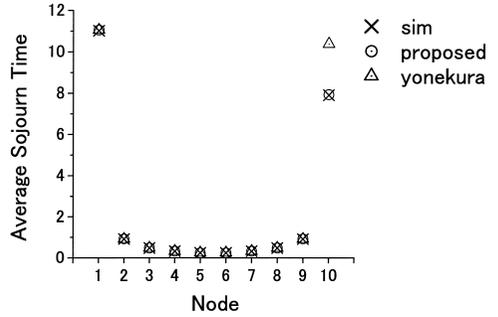


図 7 各ノードの平均系内時間 (指数サービス, \mathcal{M}_2)
Fig. 7 Average sojourn time at each node in case of exponential service and service rate is \mathcal{M}_2 .

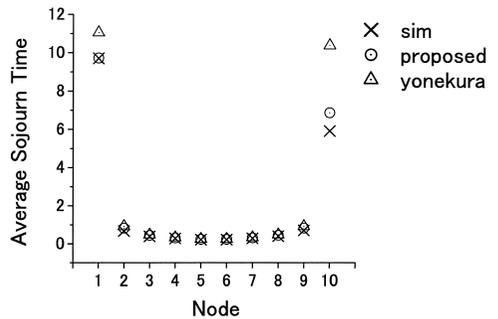


図 8 各ノードの平均系内時間 (アーランサービス, \mathcal{M}_2)
Fig. 8 Average sojourn time at each node in case of Erlang service ($r = 2$) and service rate is \mathcal{M}_2 .

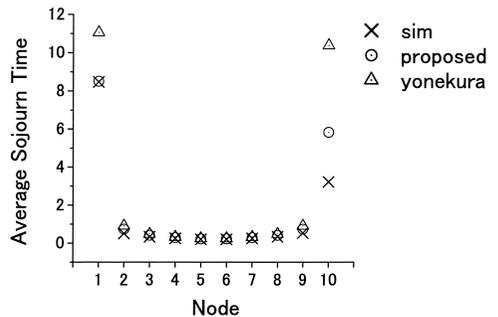


図 9 各ノードの平均系内時間 (アーランサービス, \mathcal{M}_2)
Fig. 9 Average sojourn time at each node in case of Erlang service ($r = 10$) and service rate is \mathcal{M}_2 .

近似値はシミュレーション値とほぼ一致しており従来法よりも精度が良い。また近似値はシミュレーション値に対して安全側である。提案法の精度が良い理由は、分散-時間曲線をフィッティングする近似条件を採用したためである。一般に待ち行列では、平均到着率が一致していても到着過程のバースト性が強いほど平均キュー長が伸びるため平均系内時間が大きくなる。

よって退去過程の近似においてバースト性を無視すると近似精度が悪い。バースト性は分散-時間曲線によって定義されるから、本研究ではこれをフィッティングするための近似条件を設けた。従来法における近似条件はバースト性を考慮していなかったため誤差が大きくなった。なお従来法では次ノードにおける平均系内時間を一致させる条件を設けていたため、若いノードでの近似値は誤差が小さい。しかしノードごとに近似を行うため誤差が累積し、後のノードほど近似値の誤差が拡大する。

アーランサービスの場合(図5, 図6, 図8, 図9), ステージ数が大きいほどノードごとの平均系内時間の減少が急となる。これはステージ数が大きいほど一定サービスに近づき、また完全な一定サービスの場合にはノード2以降での待ち時間は0となるためである。従来法では退去過程を近似できないため、図5, 図6, 図8, 図9における従来法は、アーランサービスと同じサービス率をもつ指数サービスとして解析を行っており、従来法による近似値は安全側だが誤差が大きい。提案法では従来法よりもシミュレーション値に近い近似値が得られる。しかし、提案法でも指数サービスのときと比べると誤差が大きく、ステージ数が大きいほど誤差が拡大する。アーランサービスのとき誤差が拡大する原因の一つとして、分散-時間曲線のフィッティングが正確に行えないことが挙げられる。図10は、 $r = 10$ のアーランサービスにおけるノード1からの退去過程について、式(23)の $\hat{v}(t)$ と $v^*(t)$ をプロットしたものであり、正確なフィッティングが行えていないことが分かる。近似モデルの状態数を上げパラメータ数を増やせばより正確なフィッティングが可能であるが、パラメータは数値計算によってしか決定できなくなり、計算量が増加し実用的でなくなる。また提案条件3)における t_1 の選び方を工夫することで、近似精度は向上する。

次に K の値による近似精度への影響について考える。図5に対応してサービス率 \mathcal{M}_1 , ステージ数 $r = 2$ の場合、及び図6に対応してサービス率 \mathcal{M}_1 , ステージ数 $r = 10$ の場合において、 K の値を $K = 10, 15, 20$ と変化させてノード10での平均系内時間を提案法で計算した値、及びシミュレーション値を表2に示す。 K の値を大きくしても得られる値はほとんど変わらない。これは、提案法が各ノードにおいて前段からの複雑な退去過程をより簡単な MMPP で近似していることによる限界であると考えられる。それに対して、 K

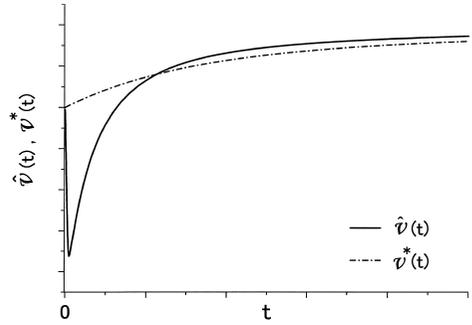


図10 アーランサービスにおける $\hat{v}(t), v^*(t)$ のフィッティングの一例 ($r = 10$)

Fig. 10 An example of the fitting of $\hat{v}(t)$ and $v^*(t)$ in case of Erlang service ($r = 10$).

表2 K の値による計算値の比較

Table 2 Comparison of computation values with varying K .

K	10	15	20	simulation
Proposed ($\mathcal{M}_1, r = 2$)	3.99	4.02	4.02	3.21
Proposed ($\mathcal{M}_1, r = 10$)	3.41	3.42	3.42	1.81

の値を大きくすると後に示すように計算時間が非常に大きくなる。以上のことからレベル K の値としては $K = 10$ で十分であることが分かる。

各ノードのサービス率が \mathcal{M}_2 の場合(図7, 図8, 図9)における提案法の近似精度が \mathcal{M}_1 の場合(図4, 図5, 図6)よりも良くなっているように見える理由は次のとおりである。 \mathcal{M}_2 ではノード2からノード9におけるサービス率は \mathcal{M}_1 のサービス率よりも大きい。サービス率が大きいとノードにおいてパケットの待ち時間はほとんど発生せず、系内時間はサービス時間にほぼ等しくなる。したがって、この場合、トラヒックのモデル化が仮に適切でなくても平均到着率を一致させる程度のモデル化であれば系内時間の計算値はほぼ真値に等しくなる。つまり、上で議論した2状態 MMPP によるモデル化の限界が目立たなくなっているだけである。

6.2 計算量について

提案法による退去過程の近似では、式(23)の $\hat{v}(t_1)$ を求めるため、式(19)で与えられる行列 \hat{U} の指数関数 $\exp\{\hat{U}t\}$ を計算する必要がある。本論文では $K = 10$ としたから、指数サービスの場合は \hat{U} は 22×22 の行列となり計算量はほとんど問題とならない。式(24)の t_1 は、指数サービスの場合は $t \rightarrow 0$ における $\hat{v}(t)$ の接線を利用することで高速にその近似解が得られる。また提案法では式(28')からニュート

表3 解析に要した CPU Time の比較 (指数サービス)
Table 3 Comparison of CPU Time required to analysis in case of exponential service.

	Proposed	Yonekura	ratio
\mathcal{M}_1	0.21[s]	1.21[s]	17.4%
\mathcal{M}_2	0.13[s]	0.51[s]	25.5%

表4 解析とシミュレーションの CPU Time の比較 (指数サービス)
Table 4 Comparison of CPU Time required to analysis and simulation in case of exponential service.

	10 nodes	20 nodes	30 nodes
Proposed	0.19[s]	0.27[s]	0.34[s]
Simulation	15.0[s]	27.0[s]	51.0[s]

ン法によって q を求める必要があるが収束は速い。更に q が求めれば式 (31) ~ (34) からパラメータが決定できる。指数サービスの場合において、10 ノードをすべて解析し終えるまでの CPU 時間を、提案法、従来法それぞれ測定した。結果を表 3 にまとめる^(注3)。本研究では多くの解析を行い、提案法での解析に要する CPU 時間が従来法よりも平均で 70% 以上短縮できることを確認した。

アーランサービスの場合、行列 \hat{U} のサイズはステージ数に比例して増加する。また式 (24) から数値的に t_1 を決定する必要がある。よってステージ数が大きいほど計算量が増加してしまう問題がある。

次に、提案法での解析に要する時間とシミュレーションに要する時間を比較する。計算時間は、ともに、最終ノードにおける平均系内時間の値を相対誤差 10^{-5} 以下で得られるまでの時間である。ノード 1 への到着をパラメータ $(\lambda_0, \lambda_1, q_0, q_1) = (1.0, 0.0, 0.01, 0.01)$ をもつ MMPP とし、すべてのノードのサービスはサービス率 1 の指数サービスとする。ノード数 = 10, 20, 30 に対する計算時間の比較を表 4 に示す。提案法による解析はシミュレーションと比較して十分に高速であるといえる。

また、指数サービス以外のときの提案法の計算時間と K, r との関係を考える。表 5 にサービス率が \mathcal{M}_1 の場合に K と r の値を変化させて得られた提案法の計算時間を示す。この結果によると計算時間はほぼ $K^3 r^3$ に比例している。したがって現時点では、指数サービス以外の場合には提案法の計算量は大きいといえる。これを改良することは今後の課題である。

7. む す び

本研究では到着過程を 2 状態 MMPP、サービス時

表5 K 及び r の値による計算時間の比較
Table 5 Comparison of computation time with varying K and r .

$r \setminus K$	10	15	20
2	6.96[s]	17.97[s]	39.70[s]
5	71.43[s]	2.10×10^2 [s]	1.41×10^3 [s]
10	1.25×10^3 [s]	4.55×10^3 [s]	1.08×10^4 [s]
15	4.13×10^3 [s]	1.50×10^4 [s]	3.65×10^4 [s]

間分布を相型分布とした直列型ネットワークにおいて、各ノードの平均系内時間を解析した。通常の解析では到着過程の状態数がノードごとに増加し解析が困難となるため、本研究では退去過程を 2 状態 MMPP モデルで近似した。この近似においてサービス時間分布を相型分布としたとき、米倉ら [1] による従来の近似条件では問題があり、例えばアーランサービスの場合には、従来法では退去過程を近似不能である。そこで提案法では、分散-時間曲線をフィッティングする近似条件を採用した。このフィッティング条件によって、従来法よりもシミュレーション値に近く、かつ安全側の近似値を得ることができた。また提案法での解析に要する CPU 時間は、指数サービスの場合、従来法よりも平均で 70% 以上短縮した。アーランサービスの場合、提案法ではレベル K 及びステージ数 r の増加に伴い計算量が増加した。

本研究ではトラヒックの合流がないパケットネットワークを対象として解析を行った。今後は更に一般的に、トラヒックの合流を考慮したネットワークモデルについて解析を進めていく。

謝辞 本研究の一部は、ATR 環境適応通信研究所 (現 ATR 適応コミュニケーション研究所) からの平成 11 ~ 13 年度の助成研究費によって行われました。また、論文改訂の際の数値計算に御協力頂いた長岡技術科学大学修士 1 年生の立原和氏に感謝致します。

文 献

- [1] 米倉 誠, 中川健治, 恩田和幸, 齋藤 茂, “バーストトラヒックを入力とするネットワークにおける平均系内時間の近似解析,” 信学論 (B), vol. J85-B, no. 7, pp. 1021-1030, July 2002.
- [2] 三屋光史朗, 長健二朗, 加藤 朗, 村井 純, “パケットサイズ分布からみた IP トラフィックの傾向,” インターネットコンファレンス 2000 論文集, pp. 47-56, Nov. 2000.
- [3] 牧本直樹, 待ち行列アルゴリズム, 朝倉書店, 2001.
- [4] N. Bean, D. Green, and P. Taylor, “Approximations to the output process of MAP/PH/1 queues,” in Advances in Matrix Analytic Methods for Stochastic

(注3): 計算機の性能: Intel Pentium III, 871 MHz, Memory: 320 MByte, OS: Windows2000, Application: MatLab.

Models, ed. A. Alfa and S. Chakravarthy, pp.151–170, Notable Publications, NJ, 1998.

- [5] N. Bean, D. Green, and P. Taylor, “The output process of an MMPP/M/1 queue,” J.Appl. Prob., vol.35, pp.998–1002, 1998.

(平成 15 年 6 月 12 日受付, 11 月 2 日再受付)



坂本 将清

2001 長岡技科大・工・電気・電子システム卒．2003 同大大学院修士課程了．同年パナソニックコミュニケーションズ(株)入社．



中川 健治 (正員)

昭 55 東工大・理・数学卒．昭 60 同大大学院博士課程満期退学．昭 60 NTT 研究所入社．平 4 長岡技科大工学部助教授．待ち行列理論，ネットワーク特性評価，大偏差理論等の研究に従事．理博．IEEE, 情報理論とその応用学会，日本数学会各会員．



恩田 和幸 (正員)

平 4 長岡技科大・工・電気・電子システム卒．平 6 同大大学院電気・電子システム工学専攻修士課程了．同年 NTT アドバンステクノロジー(株)入社．平 10 ATR 環境適応通信研究所研究員．平 13 NTT アドバンステクノロジー(株)に復帰，現在に至る．

至る．



斎藤 茂 (正員)

昭 49 東北大・工・通信卒．昭 54 同大大学院博士課程了．同年 NTT 研究所入所．平 11 ATR 環境適応通信研究所室長．平 15 立命館大学理工学部教授．コヒーレント光伝送，光増幅中継伝送，アドホックネットワークの研究に従事．工博．平 8 本学会論文賞受賞．IEEE 会員．

論文賞受賞．IEEE 会員．